

## **Componente Acque Superficiali – Allegato 2A**

### **STRUMENTI DI INDAGINE: Il Modello Numerico Unidimensionale per lo Studio della Morfodinamica dei Corsi d'Acqua Naturali**

#### **Premessa**

Nella presente appendice viene presentato l'algoritmo utilizzato per la modellazione morfodinamica unidimensionale del Torrente Ombrone Pistoiese. Il modello numerico proposto per lo studio delle correnti a pelo libero in alvei naturali è in grado di simulare le condizioni di deflusso tipiche dei torrenti montani caratterizzati da geometrie fortemente irregolari e frequenti transizioni attraverso lo stato critico. Le equazioni di de Saint Venant scritte in forma conservativa, sono state riformulate ai volumi finiti ed integrate numericamente mediante uno schema esplicito predictor-corrector. Particolare attenzione è stata posta nella formulazione del termine sorgente, ed in modo particolare ai termini legati alla pendenza locale del fondo e alla non prismaticità dell'alveo. Tale formulazione consente di bilanciare accuratamente i termini di flusso in condizioni asintoticamente stazionarie. Data la notevole semplicità del codice di calcolo proposto, il presente modello non richiede la soluzione del problema di Riemann all'interfaccia fra celle contigue, né l'introduzione di alcuna speciale correzione per descrivere le discontinuità presenti nella soluzione. Lo schema numerico messo a punto è stato convalidato simulando condizioni di moto stazionario e non stazionario in varie geometrie di corsi d'acqua sia riferite a classici casi test che a situazioni reali, caratterizzate da griglie spaziali non uniformi e senza alcuna interpolazione dei dati topografici (Catella et al., 2004; Catella & Solari, 2005). Il metodo realizzato cattura correttamente le discontinuità presenti in corrispondenza sia di brusche variazioni della quota dell'alveo sia della larghezza del corso d'acqua, dimostrando una notevole versatilità e robustezza, fornendo inoltre, soluzioni stabili ed in grado di conservare i flussi di massa.

Inoltre, seguendo una procedura disaccoppiata, è stato messo in conto il carattere mobile del fondo simulando l'evoluzione altimetrica del corso d'acqua sia in regime fluviale che torrentizio (Catella et al., 2005).

Infine il modello numerico è in grado di riprodurre anche le condizioni di deflusso in pressione attraverso singolarità idrauliche quali ponti, disconnettendo il dominio di integrazione delle equazioni di de Saint Venant e di Exner mediante l'introduzione di opportune condizioni al contorno interne (Catella & Bechi, 2006; Catella et al., 2006).

#### **Il modello idrodinamico**

##### **LE EQUAZIONI DI GOVERNO**

Si consideri un sistema di assi cartesiani ortogonali,  $(x, y, z)$ , di versori  $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ , con l'asse  $z$  verticale positivo ascendente e l'asse  $x$  orizzontale, coincidente con la proiezione della linea del thalweg sul piano  $z = 0$ , e positivo verso valle (Figura 2.A.1). Considerando valori trascurabili per la pendenza del fondo, le sezioni trasversali del corso d'acqua si assumono ortogonali all'asse  $x$ . La corrente, come d'uso nello schema unidimensionale, risulta rettificata in pianta.

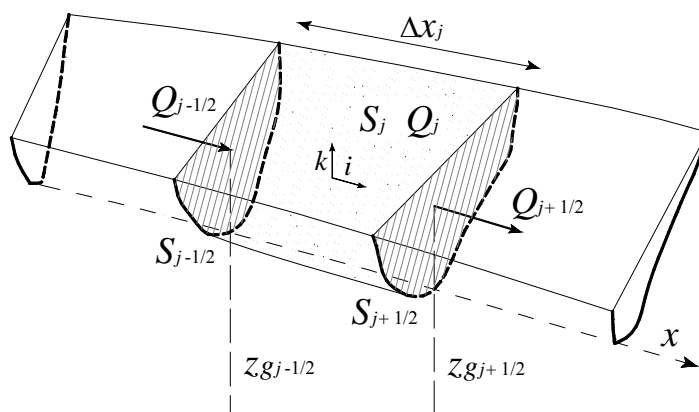


Figura 2.A.1 - Schematizzazione del volume di controllo.

Il volume di controllo  $V$ , in corrispondenza della cella  $j$ -esima, è definito dal tratto di canale delimitato dalle due sezioni trasversali  $j$  e  $j+1$ , ortogonali all'asse  $x$ . La superficie di controllo  $S$  è composta rispettivamente dalla sezione trasversale di monte  $S_j$ , dalla sezione trasversale di valle  $S_{j+1}$ , dalla superficie bagnata  $S_i$ , delimitata da  $S_j$  e da  $S_{j+1}$ , e dalla superficie del pelo libero  $S_{pl}$ .

L'equazione della quantità di moto, applicata al volume di controllo  $V$ , porge:

$$\int_V \rho(-g\bar{k})dV + \int_S (-p\bar{n} + \bar{\tau})dS = \int_V \frac{\partial \rho \bar{v}}{\partial t} dV + \int_S \rho \bar{v}(\bar{v} \cdot \bar{n})dS \quad (1)$$

dove  $\rho$  è la densità dell'acqua;  $g$  l'accelerazione di gravità;  $p$  la pressione;  $\bar{n}$  il versore uscente normale a  $S$ ;  $\bar{\tau}$  le tensioni tangenziali (viscose + turbolente); e  $\bar{v}$  è la velocità locale mediata sulla turbolenza.

Proiettando l'equazione (1) sull'asse orizzontale  $x$  e considerando le sponde impermeabili, si ottiene:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} Q dx + F_{j+1/2} - F_{j-1/2} + \int_{S_i} (p\bar{n} - \bar{\tau}) \cdot \bar{i} dS_i = 0 \quad (2)$$

dove  $Q$  è la portata liquida e  $F_{j\pm 1/2}$  è la spinta totale definita come segue:

$$F_{j\pm 1/2} = \int_{S_{j\pm 1/2}} (p + \rho v^2) \bar{i} dS \quad (3)$$

#### LA TRATTAZIONE DEL TERMINE SORGENTE

Particolare attenzione è stata posta nella trattazione del termine sorgente presente nell'equazione (2), che risulta composto dalla somma di due termini: uno legato alle tensioni tangenziali d'attrito e l'altro alle pressioni normali agenti sul contorno bagnato  $S_i$ .

Considerando due sezioni verticali separate fra loro da una distanza trascurabile  $dx$ , risulta possibile affermare, con ragionevole approssimazione, che il contributo nella direzione longitudinale della spinta delle pareti dell'alveo dovuto alle pressioni normali è esprimibile come la variazione del momento statico  $I_1$  della sezione liquida valutato rispetto ad una altezza fissa della superficie libera  $h_m$ , come dimostrato da Schippa & Valiani (2002) e Capart et al. (2003), e vale:

$$p\bar{n} \cdot \bar{i} dS_i = \gamma \frac{\partial I_1}{\partial x} \Big|_{h_m} dx = \gamma \frac{\partial S \cdot (h - z_g)}{\partial x} \Big|_{h_m} dx = \gamma \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial x} (h_m - z_g) - S \frac{\partial z_g}{\partial x} \right) dx \quad (4)$$

dove  $\gamma$  è il peso specifico;  $h_m$  la quota media del pelo libero all'interno della cella; e  $z_g$  la quota del baricentro dell'area bagnata.

Integrando l'equazione (4) sulla  $j$ -esima cella ed assumendo una variazione lineare di tutte le grandezze in gioco (quota del pelo libero, area bagnata e la corrispondente quota del baricentro) si ottiene:

$$\int_{S_j} p \bar{n} \cdot \bar{i} dS_l = \gamma \cdot [S_{j+1/2} (h_{mj} - z_{gj+1/2}) - S_{j-1/2} (h_{mj} - z_{gj-1/2})] \quad (5)$$

Il contributo delle tensioni tangenziali agenti sulla superficie bagnata dell'alveo, per ciascun intervallo della discretizzazione spaziale, è stato espresso, in prima approssimazione, come la media del prodotto dei valori delle tensioni tangenziali in corrispondenza delle due sezioni verticali  $S_j$  e  $S_{j+1}$  per i rispettivi contorni bagnati e per l'intervallo spaziale:

$$\int_{S_l} \bar{\tau} \cdot \bar{i} dS_l = \rho \frac{\Delta x_j}{2} \left[ B_{j+1/2} \left( \frac{Q|Q|}{(CS)^2} \right)_{j+1/2} + B_{j-1/2} \left( \frac{Q|Q|}{(CS)^2} \right)_{j-1/2} \right] \quad (6)$$

dove  $B_{\pm 1/2}$  è il perimetro bagnato, e  $C$  il coefficiente adimensionale di Chézy.

### L'EQUAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Sostituendo l'equazione (5) e (6) nell'equazione (2), si ottiene la seguente espressione per l'equazione di conservazione della quantità di moto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} Q dx + \left[ \beta \frac{Q|Q|}{S} + gI_1 \right]_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} - g [S_{j+1/2} (h_{mj} - z_{gj+1/2}) - S_{j-1/2} (h_{mj} - z_{gj-1/2})] + \\ + \frac{\Delta x_j}{2} \left[ B_{j+1/2} \left( \frac{Q|Q|}{(CS)^2} \right)_{j+1/2} + B_{j-1/2} \left( \frac{Q|Q|}{(CS)^2} \right)_{j-1/2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

dove  $\beta$  rappresenta il coefficiente di ragguglio delle quantità di moto, stimato come segue:

$$\beta = \frac{\int_0^{b(h)} (h - z_f(y)) dy \cdot \int_0^{b(h)} (h - z_f(y))^2 \{ [A \ln(h - z_f(y)) + B + A]^2 - A^2 \} dy}{\left[ \int_0^{b(h)} (h - z_f(y))^{3/2} [A \ln(h - z_f(y)) + B - A] dy \right]^2} \quad (8)$$

assumendo costante la cadente  $J$  rispetto alla coordinata  $y$  in ciascuna sezione (Figura 2.A.2) ed ipotizzando una distribuzione logaritmica della velocità su ogni verticale:  $v(h, y) = u_*(h, y) \cdot [A \ln(h - z_f) + B]$ ; dove  $b$  è la larghezza del pelo libero,  $z_f(y)$  la quota del fondo e  $u_* = \sqrt{g(h - z_f(y))J}$  la velocità di attrito. Nel presente studio  $A$  e  $B$  sono stati posti uguali rispettivamente a 2,5 e a 8.5.

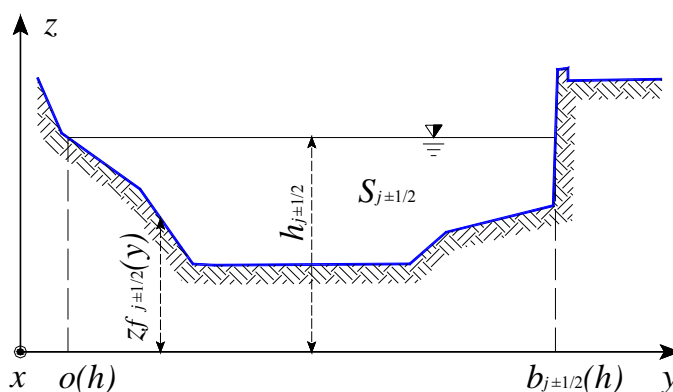


Figura 2.A.2 - Schematizzazione di una sezione trasversale.

### L'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

L'equazione di continuità scritta in forma integrale, assumendo che non sia presente alcun afflusso o deflusso laterale della portata, risulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} S dx + [Q]_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} = 0 \quad (9)$$

### IL MODELLO NUMERICO

Le equazioni di governo (7) e (9) rappresentano le leggi fondamentali della meccanica scritte per il tratto di canale compreso fra le sezioni  $j$  e  $j+1$ , e riferito quindi alla  $j$ -esima cella.

Con riferimento alla discretizzazione consueta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} G dx \cong \frac{G_j^{n+1} - G_j^n}{\Delta t^n} \Delta x_j \quad (10)$$

(dove  $G$  è una variabile arbitraria,  $G_m$  è il suo valore medio definito al centro della cella  $j$ -esima, ed  $n$  è il passo temporale) si ottiene un sistema composto da  $2(N-1)$  equazioni nelle  $2(N-1)$  variabili  $S_j$  e  $Q_j$  valori dell'area della sezione liquida  $S$  e della portata liquida  $Q$  in ciascuna delle  $N-1$  celle, definite da una discretizzazione dell'intera lunghezza del tratto di corso d'acqua per mezzo di una griglia di  $N$  nodi con passo spaziale variabile.

La soluzione del sistema è stata condotta con riferimento ad uno schema esplicito a due passi predictor-corrector, che ha dimostrato sufficienti doti di stabilità (nel rispetto ovviamente della condizione di Courant-Lewy). La tecnica proposta, composta da una sequenza di due passi in cui le derivate spaziali sono sempre valutate nella medesima direzione, porge:

$$\mathbf{U}_j^p = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_j} [\mathbf{F}_{j+1/2}^n - \mathbf{F}_{j-1/2}^n] + \Delta t^n \mathbf{S}_j(\mathbf{U}^n, x) \quad (11)$$

$$\mathbf{U}_j^c = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x_j} [\mathbf{F}_{j+1/2}^p - \mathbf{F}_{j-1/2}^p] + \Delta t^n \mathbf{S}_j(\mathbf{U}^p, x) \quad (12)$$

dove gli apici  $p$  e  $c$  indicano rispettivamente i passi predictor e corrector, mentre  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}$  ed  $\mathbf{S}$  sono rispettivamente i vettori delle variabili conservative, dei flussi e dei termini sorgente, definiti come segue:

$$\mathbf{U}_j = \begin{bmatrix} S_j \\ Q_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{j\pm 1/2} = \begin{bmatrix} Q \\ \beta \frac{Q|Q|}{S} + gI_1 \end{bmatrix}_{j\pm 1/2} \quad (13a,b)$$

$$\mathbf{S}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g}{\Delta x_j} [S_{j+1/2}(h_{mj} - z_{gj+1/2}) - S_{j-1/2}(h_{mj} - z_{gj-1/2})] - \frac{1}{2} \left[ B_{j+1/2} \left( \frac{Q|Q|}{(CS)^2} \right)_{j+1/2} + B_{j-1/2} \left( \frac{Q|Q|}{(CS)^2} \right)_{j-1/2} \right] \end{bmatrix} \quad (13c)$$

La soluzione al nuovo istante temporale  $n+1$  è valutata come media tra i valori delle variabili ottenuti ai passi predictor e corrector.

### L'ASSEGNAZIONE DELLE VARIABILI

Nel presente modello le variabili conservative delle equazioni di governo sono rappresentate dai valori dell'area della sezione liquida  $S$  e della portata liquida  $Q$  presenti all'interno di ciascuna cella, indipendentemente dalla discretizzazione spaziale adottata. I flussi, invece, sono valutati alle due interfacce che delimitano ogni cella, utilizzando i valori delle grandezze idrauliche calcolate in corrispondenza di ciascuna interfaccia in corrispondenza del passo di calcolo precedente.

Il criterio per assegnare le  $2N$  variabili  $S_{j+1/2}$  e  $Q_{j+1/2}$  alle  $N$  interfacce a partire dai  $2(N-1)$  valori  $S_j$  e  $Q_j$  calcolati in ciascuna cella e dalle due condizioni al contorno richiede particolare attenzione. Il metodo è relativamente semplice, risultando particolarmente indicato per la simulazione di correnti in alvei naturali, dove le variabili di stato, in particolare  $S$ , possono risultare fortemente diverse ai due nodi estremi della cella, a causa delle irregolarità presenti nella topografia del corso d'acqua.

Per assegnare la sezione liquida  $S$ , è stato applicato un criterio basato sul valore del numero di Froude della corrente media nelle celle di monte e di valle rispetto al nodo da assegnare, oltre ad un'appropriata condizione al contorno all'estremità di valle o di monte del canale rispettivamente nel caso di corrente lenta o veloce. Il numero di Froude della corrente media valutato nella cella  $j$ -esima vale:

$$Fr_j = \frac{(\alpha_{j-1/2} + \alpha_{j+1/2})(b_{j-1/2} + b_{j+1/2})Q_j^2}{4gS_j^3} \quad (14)$$

dove  $\alpha$  rappresenta il coefficiente di ragguglio della velocità, stimato nel modo seguente:

$$\alpha = \frac{\left[ \int_0^{b(h)} (h - z_f(y)) dy \right]^2 \cdot \int_0^{b(h)} (h - z_f(y))^{5/2} \{K_1(h, y)\} dy}{\left[ \int_0^{b(h)} (h - z_f(y))^{3/2} [A \ln(h - z_f(y)) + B - A] dy \right]^3} \quad (15)$$

dove

$$K_1(h, y) = (A \ln(h - z_f(y)) + B)^3 - 3A(A \ln(h - z_f(y)) + B)^2 + 6A^2(A \ln(h - z_f(y)) + B) - 6A^3.$$

In particolare, se le correnti medie nelle celle  $j$ -esima e  $j+1$ -esima sono entrambe subcritiche,  $S$  all'interfaccia  $j+1/2$ -esima assume il valore di  $S_{j+1}$ , mentre se sono entrambe supercritiche assume il valore di  $S_j$ . Nel caso di correnti transcritiche, se le correnti medie nelle celle  $j$ -esima e  $j+1$ -esima sono rispettivamente subcritica e supercritica,  $S$  all'interfaccia  $j+1/2$ -esima assume il valore corrispondente allo stato critico, mentre nel caso opposto è applicato un criterio basato su considerazioni relative alle spinte totali. In particolare, facendo

referimento l'equazione (3), se  $F_{j+1/2}(S_j, Q_j)$  è più grande di  $F_{j+1/2}(S_{j+1}, Q_j)$   $S$  all'interfaccia  $j+1/2$ -esima assume il valore di  $S_j$ , nel caso opposto di  $S_{j+1}$ .

### LE CONDIZIONI AL CONTORNO

Nelle simulazioni numeriche unidimensionali, in condizioni di fondo fisso, a seconda del segno delle caratteristiche, devono essere imposte due condizioni al contorno. In particolare, una celerità è sempre positiva (diretta verso valle), mentre l'altra può essere negativa (diretta verso monte) o positiva (diretta verso valle) a seconda che il valore assunto dal numero di Froude sia rispettivamente minore o maggiore di 1.

Nel caso di correnti subcritiche, una condizione al contorno deve essere imposta nella prima sezione di monte, in relazione alla caratteristica entrante nel dominio, mentre l'altra condizione al contorno deve essere assegnata all'ultima sezione di valle, in relazione alla caratteristica uscente dal dominio. Nel caso di correnti supercritiche, le due condizioni al contorno devono essere specificate entrambe nella prima sezione di monte, in quanto entrambe le celerità caratteristiche entrano all'interno del dominio.

Le condizioni al contorno possono essere espresse in termini di portata liquida  $Q$ , di altezza d'acqua  $y$  o di una loro combinazione. Di regola la portata liquida è sempre imposta come condizione al contorno di monte sia che il regime di corrente sia subcritico o supercritico. Mentre un'appropriata grandezza idraulica (e.g. altezza di moto uniforme, altezza critica o altezza nota) deve essere specificata come condizione al contorno di monte o di valle a seconda del tipo di regime di corrente.

### LA CONDIZIONE DI STABILITÀ

Per la stabilità del presente schema esplicito, il numero di Courant-Friedrich-Lewy  $N_{CFL}$  deve soddisfare la seguente relazione:

$$N_{CFL} = \Delta t \cdot \frac{\max_j \left[ \left| \frac{Q}{S} \right|_{j+1/2} \right] + \max_j \left[ \sqrt{\frac{g \cdot S}{\alpha \cdot b}} \right]_{j+1/2}}{\min_j [\Delta x_j]} < 1 \quad 1 \leq j \leq N . \quad (16)$$

### **La modellazione di una corrente in pressione sotto un ponte**

Nel presente capitolo viene descritta la modellazione idrodinamica delle condizioni di deflusso in pressione attraverso ponti ad impalcato orizzontale ed in assenza di fenomeni di tracimazione. Il modello realizzato è in grado di simulare le condizioni di deflusso a superficie libera in presenza di un ponte con pile e spalle mediante lo schema numerico precedentemente descritto, considerando esclusivamente una riduzione dell'area liquida ed un aumento del perimetro bagnato.

Nel caso di deflusso in pressione, lo schema numerico realizzato utilizza condizioni al contorno interne per legare le caratteristiche della corrente a monte e a valle della struttura, utilizzando una metodologia frequentemente adottata nei codici di calcolo proposti in letteratura (Natale et al., 2004). Nella fattispecie, le condizioni al contorno interne sono assegnate in base a considerazioni di tipo energetico per la sezione di ingresso e di uscita del ponte. Inoltre, seguendo una procedura proposta da Defina & Susin (2003), sono state introdotte delle condizioni per l'ingresso e l'uscita dallo stato di deflusso in pressione nel caso di regime di corrente subcritico e supercritico, che consentono di riprodurre il fenomeno

di isteresi (Muškatirović & Batinić, 1977; Baines, 1984; Austria, 1987; Lawrence, 1987; Baines & Whitehead, 2003; Defina & Susin, 2003).

### LE CONDIZIONI AL CONTORNO INTERNE

Si consideri un ponte ad impalcato orizzontale e sia fissata l’altezza  $a$  dell’impalcato del ponte dal fondo (Figura A3). Si supponga, inoltre, che la struttura non determini alcuna variazione di larghezza della sezione trasversale. Sotto queste ipotesi, il comportamento della corrente in prossimità del ponte è approssimabile a quello che avrebbe in prossimità di una paratoia piana.

In alvei a debole pendenza, a causa della presenza dell’ostacolo, si stabilisce a monte dell’opera un profilo di rigonfiamento al di sopra della profondità di moto uniforme. A valle della struttura, a seconda dell’altezza assunta dalla luce, possono verificarsi due differenti regimi di corrente. Se l’altezza della luce è più alta della profondità corrispondente allo stato critico per la portata data, nella sezione di valle del manufatto si instaura una corrente lenta, e l’efflusso è rigurgitato. Altrimenti la corrente che si instaura è veloce ed il profilo di depressione, che conseguentemente si sviluppa, sarà delimitato a valle da un risalto idraulico (Figura 2.A.3a). In tal caso, se l’altezza coniugata della profondità della sezione contratta è minore dell’altezza della corrente di valle, il risalto è annegato e l’efflusso viene rigurgitato (Figura 2.A.3b).

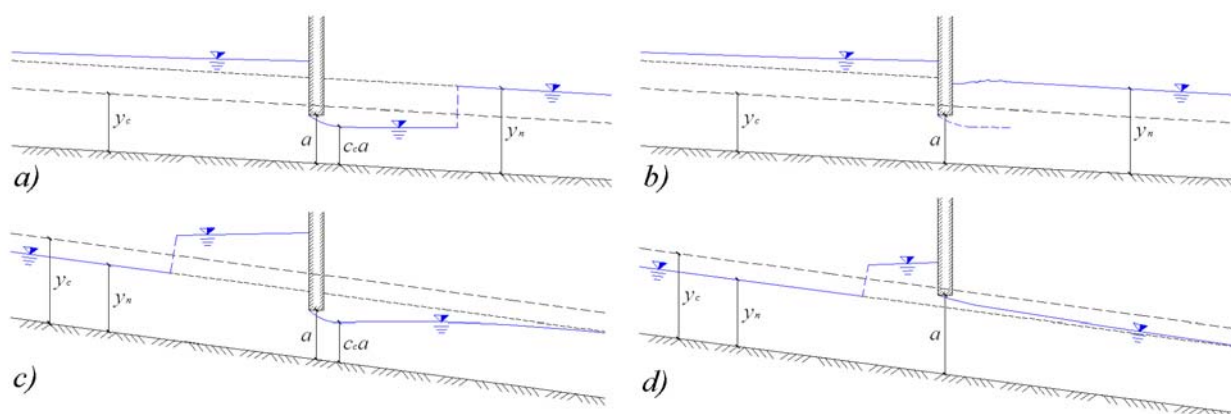


Figura 2.A.3 - Deflusso attraverso una paratoia piana con luce di fondo in un alveo cilindrico a debole pendenza (casi a e b) e a forte pendenza (casi c e d). A linea intera il profilo, a tratteggio la profondità critica, a punti la profondità di moto uniforme.

In alvei a forte pendenza, essendo l’altezza d’acqua immediatamente a monte del ponte sempre maggiore dell’altezza critica, si sviluppa un profilo di rigonfiamento, delimitato a monte da un risalto idraulico. Assumendo che da valle non vi sia alcun controllo, il profilo del pelo libero della corrente tende asintoticamente a ripristinare l’assetto di moto uniforme verso valle. Se l’altezza della luce del ponte è minore della profondità di moto uniforme si ha un profilo di corrente veloce decelerata (Figura 2.A.3c), al contrario si ha un profilo di corrente veloce accelerata (Figura 2.A.3d).

### L’AGGIORNAMENTO DELLE VARIABILI

La simulazione del deflusso di una corrente in pressione attraverso il ponte, è condotta seguendo una procedura a due passi: nel primo passo le equazioni di governo (7) e (9) sono risolte utilizzando lo schema numerico precedentemente descritto, senza considerare la

presenza del ponte, e solo successivamente, nel secondo passo viene simulata l'interazione della corrente con il manufatto.

A tale scopo, l'analisi richiede la definizione di tre sezioni: due poste immediatamente a monte e a valle della struttura, e la terza situata a valle del ponte, ad una distanza tale da poter ammettere, con un ragionevole grado di approssimazione, valida l'ipotesi di conservazione della quantità di moto totale.

Se nella terza sezione il regime di corrente è supercritico, il deflusso a valle dell'opera è sempre libero. Viceversa, se la corrente è subcritica, il deflusso può essere libero o rigurgitato da valle se l'altezza della vena contratta è rispettivamente minore o maggiore dell'altezza coniugata della corrente indisturbata di valle.

Nel caso di deflusso rigurgitato, l'area liquida  $S$  della sezione  $j+1/2$ -esima di uscita dal ponte assume il valore medio  $S_{j+1}$  della cella posta immediatamente a valle dello stesso. Nel caso di deflusso libero, l'area liquida  $S$  assume il valore della sezione contratta  $c_c \hat{A}$ , dove  $c_c$  è il coefficiente di contrazione e  $\hat{A}$  è l'area della luce del ponte. Si noti che l'altezza d'acqua della vena contratta è imposta nella sezione di uscita del ponte stesso.

L'area liquida a monte dell'opera viene valutata trascurando, data la brevità del tronco considerato, i termini connessi alla non stazionarietà del moto ed applicando il teorema di Bernoulli tra le sezioni di ingresso e di uscita del ponte, si ottiene:

$$z_{b0} + y_0 + \alpha \frac{Q^2}{2gA_0^2} = \hat{z}_b + c_c a + \hat{\alpha} \frac{Q^2}{2g(c_c \hat{A})^2} + J\Delta x + \Delta H \quad (17)$$

il pedice 0 indica la sezione di ingresso;  $a$  è l'altezza della luce del ponte; e  $\Delta H$  le perdite energetiche localizzate.

Nel caso di efflusso libero le perdite energetiche concentrate sono assunte trascurabili ( $\Delta H = 0$ ), mentre in caso di efflusso rigurgitato si stimano come segue:

$$\Delta H = \zeta \frac{\left( \hat{\alpha} \frac{Q}{c_c \hat{A}} - \alpha \frac{Q}{2gA_0} \right)^2}{2g} \quad (18)$$

dove  $0 < \zeta \leq 1$  è un coefficiente di perdita concentrata.

### IL DOMINIO DI ISTERESI

Le condizioni di deflusso in pressione sotto un ponte vengono raggiunte ogniqualvolta la quota della superficie libera della corrente indisturbata diviene maggiore della corrispondente quota dell'intradosso ( $y_0 = a$ ). Pertanto, l'altezza della luce dell'apertura corrisponde al limite superiore dei valori dell'altezza d'acqua che delimitano la zona di separazione tra deflusso a superficie libera e deflusso in pressione. Seguendo l'approccio proposto da Defina & Susin (2003), la condizione di limite superiore può essere scritta in termini di variabili adimensionali come segue:

$$\frac{a}{y_c} = F_0^{-2/3} \quad (19)$$

dove  $y_c$  è l'altezza critica;  $F_0 = U_0 / \sqrt{gy_m \alpha^{-1}}$  il numero di Froude della corrente indisturbata immediatamente a monte del ponte; e  $y_m$  l'altezza d'acqua della sezione rettangolare equivalente caratterizzata dalla stessa area della sezione liquida e dallo stesso perimetro bagnato.

Pertanto, il deflusso in pressione si instaura nel momento in cui la superficie libera della corrente indisturbata diventa maggiore della quota dell'intradosso dell'opera, determinando a monte della struttura un profilo di rigonfiamento. A partire da questo stato, se la profondità della corrente inizia a decrescere sino a valori prossimi a quelli assunti dalla luce del ponte,



possono verificarsi due differenti scenari a seconda del tipo di regime di corrente. Nel caso di correnti subcritiche, una riduzione dell’altezza d’acqua tale da far scendere la quota del pelo libero al di sotto della quota dell’impalcato determina nuovamente un deflusso a superficie libera. Viceversa, nel caso di correnti supercritiche, il fenomeno di isteresi, generato dalla formazione del risalto idraulico a monte della struttura, modifica notevolmente i meccanismi di deflusso.

Il fenomeno di isteresi, che si forma in una corrente supercritica che incontra un ostacolo, è stato ampiamente studiato sia sperimentalmente che teoricamente (Muškatirović & Batinić, 1977; Baines, 1984; Austria, 1987; Lawrence, 1987; Baines & Whitehead, 2003; Defina & Susin, 2003). In un corso d’acqua, quando si verifica una transizione tra un regime di corrente supercritico ad uno subcritico, si osserva un comportamento isteretico della corrente per una determinata gamma di valori delle variabili di governo (Austria, 1987). Il fenomeno di isteresi corrisponde alla situazione per cui due differenti stati di corrente possono sussistere per le stesse condizioni esterne (Baines, 1984), ed il tipo di regime presente allo stato attuale dipende dalla storia passata (Muškatirović & Batinić, 1977; Defina & Susin, 2003).

In particolare, il comportamento di isteresi del deflusso sotto una paratoia piana, o un ponte ad impalcato orizzontale, concerne la possibilità che, per una data altezza della luce, la corrente supercritica, proveniente da monte, possa oltrepassare la struttura sia continuando indisturbata con un deflusso a superficie libera, sia con deflusso in pressione e, quindi, mediante una transizione attraverso lo stato critico a monte dell’opera.

Il limite inferiore dei valori dell’altezza d’acqua, che delimitano la zona di separazione tra deflusso in pressione e deflusso a superficie libera, può essere valutato applicando il teorema di Bernoulli tra la corrente indisturbata proveniente da monte e la *vena contracta*. Seguendo nuovamente la procedura proposta da Defina & Susin (2003), la condizione di limite inferiore può essere scritta in termini di variabili adimensionali come segue:

$$\left(\frac{a}{y_c} c_c\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{y_c} c_c\right)^{-2} = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8F_0^2}\right) F_0^{-2/3} + \frac{2F_0^{4/3}}{\left(-1 + \sqrt{1 + 8F_0^2}\right)^2} \quad (20)$$

Pertanto se l’altezza d’acqua cresce oltre il limite superiore o decresce al di sotto del limite inferiore si instaura rispettivamente un deflusso in pressione o a superficie libera. Nel caso di regime subcritico il limite superiore ed inferiore coincidono e sono definiti dall’equazione (19), mentre nel caso di regime supercritico il limite superiore ed inferiore sono ottenuti rispettivamente per mezzo delle equazioni (19) e (20), che definiscono il dominio di isteresi.

Nelle presenti simulazioni, il coefficiente di contrazione  $c_c$  è stato sempre posto uguale ad 1, in questo modo l’area contratta è uguale all’area corrispondente alla luce dell’opera.

### **La modellazione delle casse di espansione**

Nel presente capitolo viene descritta la modellazione idrodinamica delle casse di laminazione con tipologia in derivazione, nelle quali lo stramazzo laterale può funzionare sia in condizioni di deflusso libero che rigurgitato.

## IL MECCANISMO DI RIEMPIMENTO

Si consideri uno stramazzo laterale a soglia sfiorante fissa che collega un corso d'acqua con una cassa in derivazione e sia fissata la quota  $d$  della soglia. Si supponga, inoltre, che in prossimità della struttura non si determini alcuna variazione di larghezza della sezione trasversale.

Durante la fase crescente di un'idrogramma di piena, le casse di espansione iniziano ad essere inondate non appena il livello della superficie libera presente nel corso d'acqua supera la quota della soglia di sfioro. Durante la fase di riempimento della cassa, il livello liquido aumenta a seguito dell'immissione dei volumi d'acqua sfiorati. Se tale livello risulta inferiore alla quota dello sfioratore, la portata  $dQ$  sfiorata per unità di lunghezza da un elemento di soglia è data dalla seguente relazione (Catella et al., 2007):

$$dQ = \mu(h-d)\sqrt{2g(h-d)} \quad (21)$$

dove  $\mu$  è il coefficiente di deflusso assunto nel presente caso pari a 0.4.

Se il livello d'acqua raggiunto nella cassa, durante la fase di riempimento, diventa superiore alla quota di sfioro, si può verificare che le condizioni di deflusso sullo stramazzo divengano rigurgitate. In particolare, nelle simulazioni che seguono, la condizione di separazione tra deflusso libero e rigurgitato si stabilisce quando la quota raggiunta dal livello d'acqua nella cassa supera l'altezza critica sullo sfioratore. Quando il funzionamento dello stramazzo è rigurgitato, la (21) non è più valida in quanto le condizioni idrauliche presenti nella cassa a valle della soglia interagiscono con i meccanismi di sfioro.

Assumendo che la quota della superficie libera, nel generico tratto di alveo interessato dallo sfioratore, sia sempre maggiore della quota del livello liquido nella cassa, la portata  $dQ$  sfiorata per unità di lunghezza dalla soglia verso la cassa diviene:

$$dQ = [\mu_1(h-h_c) + \mu_2(h_c-d)]\sqrt{2g(h-h_c)} \quad (22)$$

dove  $\mu_1$  e  $\mu_2$  sono rispettivamente i coefficienti di efflusso libero e rigurgitato assunti pari a 0.4 e 0.65; e  $h_c$  è la quota del livello d'acqua nella cassa.

Durante la fase decrescente dell'idrogramma di piena, i livelli della superficie libera, che si stabiliscono nel corso d'acqua, diventano minori dei livelli liquidi raggiunti nella cassa e parte del volume accumulato, corrispondente al volume compreso tra la quota massima raggiunta e la quota della soglia, viene restituito all'alveo. In questo caso, la portata  $dQ$  sfiorata per unità di lunghezza dalla soglia verso l'alveo viene valutata nel modo seguente:

$$dQ = [\mu_1(h_c-h) + \mu_2(h-d)]\sqrt{2g(h_c-h)} \quad (23)$$

Infine, quando le quote del livello liquido nella cassa e della superficie libera nell'alveo sono rispettivamente maggiori e minori della quota dello sfioratore, il deflusso sullo stramazzo risulta nuovamente libero e la portata  $dQ$  sfiorata per unità di lunghezza dalla soglia di verso l'alveo risulta:

$$dQ = \mu(h_c-d)\sqrt{2g(h_c-d)} \quad (24)$$

## L'AGGIORNAMENTO DELLE VARIABILI

La simulazione delle condizioni di sfioro laterale, a seconda dei livelli d'acqua presenti nella cassa, è condotta seguendo una procedura a due passi: nel primo passo le equazioni di governo (7) e (9) sono risolte utilizzando lo schema numerico precedentemente descritto, senza considerare la presenza dello sfioratore, e solo successivamente, nel secondo passo viene simulata l'interazione della corrente con il manufatto.

A tale scopo, l'analisi richiede la definizione di almeno due sezioni: una posta immediatamente a monte della struttura ed una subito a valle. Naturalmente il profilo della

superficie libera lungo la soglia di sfioro laterale e la portata sfiorata risultano meglio ricostruiti se lo sfioratore laterale è descritto da un numero di sezioni trasversali più alto.

Occorre osservare che, attualmente, il modello è in grado di simulare anche i casi in cui ci sia transizione attraverso lo stato critico (i.e. risalto idraulico) nel tratto interessato dallo sfioratore.

Supponiamo che la soglia di sfioro laterale sia posta tra le intercelle  $j-1/2$ -esima e  $j+1/2$ -esima. La portata sfiorata nella cassa può essere determinata conoscendo le caratteristiche del moto in una sezione di estremità (di valle se il regime di corrente è subcritico, di monte se il regime di corrente è supercritico).

Se nell'interfaccia  $j+1/2$ -esima di valle, il regime di corrente è subcritico, si procede valutando la quota del pelo libero nella sezione  $j-1/2$ -esima di monte integrando l'equazione del moto permanente a partire dall'estremità aggiornata di valle ed utilizzando, nelle rispettive estremità, le portate stimate al passo precedente. Le perdite di carico totale sono valutate applicando al suddetto tratto le tensioni tangenziali agenti sulla superficie bagnata dell'interfaccia  $j+1/2$ -esima.

Se nell'interfaccia  $j-1/2$ -esima di monte, il regime di corrente è supercritico, si procede valutando la quota del pelo libero nella sezione  $j+1/2$ -esima di valle integrando l'equazione del moto permanente a partire dall'estremità aggiornata di monte ed utilizzando, nelle rispettive estremità, le portate stimate al passo precedente. Le perdite di carico totale sono valutate applicando al suddetto tratto le tensioni tangenziali agenti sulla superficie bagnata dell'interfaccia  $j-1/2$ -esima.

La portata sfiorata per unità di lunghezza viene quindi calcolata applicando una delle equazioni (21)–(24) considerando un carico costante lungo la soglia, ovvero le grandezze  $h$ ,  $h_c$  e  $d$  sono assunte pari alla quota media tra i valori estremi rispettivamente del pelo libero in alveo, del livello d'acqua nella cassa e della soglia di sfioro.

Al termine del secondo passo, viene aggiornata la portata liquida al nodo  $j-1/2$ -esimo con il seguente valore  $Q_{j+1/2}^{n+1} = Q_{j-1/2}^{n+1} - dQ^* \Delta x_j$ , sia che il regime di corrente sia subcritico o supercritico. Mentre l'area liquida  $S$  della sezione  $j-1/2$ -esima di ingresso dello sfioratore viene aggiornata se il regime di corrente è subcritico, altrimenti viene assegnata l'area liquida  $S$  della sezione  $j+1/2$ -esima di uscita. In questo modo è possibile schematizzare la curvatura del profilo di corrente che si stabilisce lungo lo sfioratore a seguito delle variazioni di portata.

## LA LEGGE DI INVASO E DI RIEMPIMENTO DELLE CASSE DI ESPANSIONE

La modellazione del fenomeno di riempimento di una cassa di espansione è condotta assumendo l'ipotesi di riempimento sincrono, ovvero trascurando gli effetti di propagazione della portata sfiorata all'interno della superficie ad ogni istante temporale.

Considerando uno sfioratore delimitato dalle sezioni  $j\pm 1/2$ -esime, la legge di invaso vale:

$$dV^{n+1} = dQ^{n+1} \Delta x_j \Delta t^n \quad (25)$$

Il volume è espresso in funzione del battente idrico nella cassa tramite una legge di riempimento, che può essere definita in funzione delle caratteristiche morfologiche della cassa nel seguente modo:

$$V = A(h_c - h_{c0})^n \quad (26)$$

dove i coefficienti  $A$ ,  $h_{c0}$  e  $n$  sono funzione della geometria della cassa.

### Il modello morfodinamico

La simulazione della morfodinamica di un corso d'acqua è ottenuta associando l'equazione di Exner alle equazioni di de Saint Venant. Le equazioni di de Saint Venant e di

Exner sono risolte seguendo una procedura disaccoppiata: ad un dato istante temporale le equazioni di continuità per la fase liquida e della quantità di moto vengono integrate assumendo il fondo fisso, e, successivamente, è integrata l’equazione di continuità per i sedimenti, utilizzando i valori delle variabili idrauliche precedentemente determinati (Catella et al., 2005).

Le equazioni di de Saint Venant e di Exner sono modellate supponendo che il letto del canale sia composto da sedimenti di granulometria uniforme ed in condizioni di dominante trasporto solido al fondo. L’equazione di continuità della fase liquida è assunta del tutto identica a quella che si utilizza in caso di fondo fisso, considerando la scala temporale delle variazioni del letto di un ordine di grandezza inferiore rispetto alla scala temporale delle variazioni della corrente, nel caso di bassa concentrazione dei sedimenti. Analogamente nell’equazione della quantità di moto sono presenti i termini relativi alla sola fase liquida.

### L’EQUAZIONE DI CONTINUITÀ PER I SEDIMENTI

La forma integrale dell’equazione di continuità per i sedimenti, sempre assumendo che non vi siano apporti laterali, può essere scritta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} z_b dx + \frac{1}{(1-\lambda)b_m} [Q_s]_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} = 0 \quad (27)$$

dove  $z_b$  è la quota del fondo del corso d’acqua;  $\lambda$  la porosità del materiale del letto;  $b_m$  la larghezza media del pelo libero all’interno della cella  $j$ -esima; e  $Q_s$  la portata solida.

### LE RELAZIONI DI CHIUSURA

La chiusura delle equazioni di governo (7), (9) e (27) è ottenuta individuando un legame tra le caratteristiche idrodinamiche della corrente ed il trasporto solido. Nel presente lavoro si è assunta l’ipotesi di adattamento immediato, cioè che il trasporto solido sia in grado di saturare la capacità di trasporto, adattandosi istantaneamente a moderate variazioni della corrente sia spaziali che temporali.

La capacità di trasporto è stata valutata applicando, nella presente analisi, la formula di Meyer-Peter e Müller (1948) e la formula di Parker (1990).

### L’EQUAZIONE DEL MODELLO

Applicando la discretizzazione (10) al sistema di equazioni di governo, si ottiene, in questo caso, un sistema composto da  $3(N-1)$  equazioni nelle  $3(N-1)$  variabili  $S_j$ ,  $Q_j$  e  $\Delta z_{bj}$  valori dell’area della sezione liquida  $S$ , della portata liquida  $Q$  e dell’entità della variazione del fondo in ciascuna delle  $N-1$  celle.

In particolare, l’equazione di continuità per i sedimenti diviene:

$$\Delta z_{bj}^{n+1} = z_{bj}^{n+1} - z_{bj}^n = -\frac{\Delta t^n}{\Delta x_j} \frac{1}{(1-\lambda)b_{mj}} [Q_{sj+1/2}^{n+1} - Q_{sj-1/2}^{n+1}] \quad (28)$$

La soluzione del presente sistema di equazioni è condotta seguendo una procedura disaccoppiata.

Ad un dato istante temporale, assumendo il fondo del corso d’acqua inizialmente fisso, vengono integrate numericamente le equazioni di continuità per la fase liquida e della quantità di moto mediante uno schema esplicito a due passi predictor-corrector basato su un metodo ai volumi finiti (vedi § 0). Successivamente, l’equazione di continuità per i sedimenti,

scritta in forma conservativa e riformulata ai volumi finiti, viene risolta applicando uno schema esplicito ed utilizzando le variabili idrauliche calcolate precedentemente.

Come già evidenziato nel paragrafo 0, la principale caratteristica del presente modello è rappresentata dall'utilizzo, come variabili conservative delle equazioni di governo, dei valori medi delle grandezze  $S_j$ ,  $Q_j$  e  $\Delta z_{bj}$  presenti all'interno di ciascuna cella in modo indipendente dalla discretizzazione spaziale adottata.

### **L'ASSEGNAZIONE DELLA VARIAZIONE DEL FONDO**

Come riportato nel paragrafo 0, l'assegnazione delle  $3N$  variabili  $S_{j+1/2}$ ,  $Q_{j+1/2}$  e  $\Delta z_{b+1/2j}$  alle  $N$  interfacce a partire dai  $3(N-1)$  valori  $S_j$ ,  $Q_j$  e  $\Delta z_{bj}$  calcolati in ciascuna cella e dalle tre condizioni al contorno richiede particolare attenzione.

In particolare l'assegnazione delle  $2N$  variabili  $S$  e  $Q$  alle  $N$  interfacce segue lo stesso criterio riportato nel paragrafo 0.

Per assegnare  $\Delta z_b$  viene nuovamente applicato un criterio basato sul valore del numero di Froude della corrente media nelle celle poste rispettivamente a monte e a valle del nodo considerato. In particolare  $\Delta z_b$  al nodo  $j+1/2$ -esimo assume il valore  $\Delta z_{bmj}$ , se la corrente media nelle celle  $j$  e  $j+1$  è subcritica, viceversa, se in entrambe le celle la corrente media è supercritica,  $\Delta z_b$  assume il valore  $\Delta z_{bmj+1}$ . In accordo con de Vries (1965), nell'ipotesi di soluzione continua del modello iperbolico, si è assunto che le perturbazioni del fondo si propagano verso valle se la corrente è in condizioni subcritiche (numero di Froude  $< 0.8$ ), e verso monte se la corrente è in condizioni supercritiche (numero di Froude  $> 1.2$ ).

Se le correnti medie nelle celle  $j$  e  $j+1$  sono rispettivamente subcritica e supercritica, al nodo  $j+1/2$ -esimo è assegnato lo stato critico e pertanto  $\Delta z_b$  assume il valore medio tra  $\Delta z_{bmj}$  e  $\Delta z_{bmj+1}$ . Nel caso opposto, al nodo  $j+1$  può essere assegnato un regime di corrente supercritica o subcritica per effetto del criterio di assegnazione delle aree medie basato sulle spinte totali. Nel primo caso  $\Delta z_b$  ai nodi  $j+1/2$ -esimo e  $j+3/2$ -esimo assume il valore  $\Delta z_{bmj+1/2}$ , nel secondo caso  $\Delta z_b$  ai nodi  $j-1/2$ -esimo e  $j+1/2$ -esimo assume il valore  $\Delta z_{bmj/2}$ . Infatti, in regime transcritico, in accordo con Sieben (1999), le perturbazioni della quota del letto del corso d'acqua si propagano sia verso monte che verso valle, inducendo una deformazione del fondo più o meno simmetrica.

### **LE CONDIZIONI AL CONTORNO**

Indipendentemente dal valore del numero di Froude, è possibile dimostrare (de Vries, 1965) che due celerità sono sempre positive (dirette verso valle) ed una è sempre negativa (diretta verso monte). Pertanto, due condizioni al contorno devono essere imposte a monte, mentre è necessario imporre una sola condizione all'estremità di valle del canale.

Nel presente studio, nel caso di corrente subcritica, la portata liquida e la quota del fondo vengono assegnate come condizioni al contorno di monte, mentre il carico piezometrico è imposto come condizione al contorno di valle. Nel caso di corrente supercritica, la portata liquida e il tirante idrico vengono assegnati come condizioni di monte, mentre la quota del fondo è imposta come condizione di valle.

### **L'AGGIORNAMENTO DEL FONDO**

La variazione di geometria delle sezioni di un corso d'acqua, che si verifica in seguito ai processi di erosione o di deposito, viene simulata, nel presente caso, semplicemente traslando verso il basso o verso l'alto l'intera sezione senza modificarne la forma. Pertanto, la nuova quota del thalweg nella  $j+1/2$ -esima intercella viene calcolata come segue:

$$z_{bj+1/2}^{n+1} = z_{bj+1/2}^n + \Delta z_{bj+1/2} \cdot$$

Il costo computazionale necessario allo studio della morfodinamica di un corso d'acqua risulta trascurabile se viene utilizzata tale procedura, dato che il pre-processamento della geometria (i.e. la conversione delle sezioni topografiche in scale di deflusso delle variabili idrauliche) viene condotto una sola volta.

Inoltre, il modello è in grado di modellare le sezioni inerodibili (e.g. cunettoni, soglie, briglie, traverse, etc.) assicurando la continuità della fase solida. In tratti appositamente identificati, la corrente può depositare sul fondo, ma non è in grado di eroderlo oltre una certa quota opportunamente definita. In questo ultimo caso la portata solida viene mantenuta costante fino alla fine del tratto inerodibile.