



Sito: Stabilimento di Macchiareddu (Assemmini)

IMPIANTO: Produzione derivati inorganici
del fluoro e acido solforico

Gestore: FLUORSID SPA

Categoria: IPPC 4.2

DOMANDA DI AUTORIZZAZIONE INTEGRATA AMBIENTALE

AI SENSI DEL D.LGS. N.59 DEL 18 FEBBRAIO 2005

Scheda D - Allegato D.5

Relazione tecnica su dati meteorologici



INDICE

1.	INTRODUZIONE: FONTI DEI DATI UTILIZZATI	3
2.	ANEMOLOGIA	5
3.	STABILITA' ATMOSFERICA.....	7
4.	TEMPERATURA, UMIDITA', PIOVOSITA'	10

APPENDICE 1 Criteri adottati per la determinazione delle classi di stabilità e delle altezze di rimescolamento

APPENDICE 2 Stima dei parametri meteorologici sito specifici

1. INTRODUZIONE

Fonti di dati

Per effettuare l'analisi della dispersione degli inquinanti in atmosfera e delle relative ricadute al suolo, illustrata nella Relazione Tecnica riportata in Allegato D6 alla domanda AIA, si è fatto riferimento ai dati meteorologici rilevati dalla rete di monitoraggio della qualità dell'aria della Provincia di Cagliari ¹.

Nell'area di Macchiareddu, i dati meteorologici sono rilevati dalla stazione denominata **CENAS6**. Tale stazione è ubicata in prossimità dell'area industriale di Macchiareddu (v.figura seguente).

Ubicazione della stazione CENAS6 (Rete Provinciale di monitoraggio qualità dell'aria)



¹ Le elaborazioni sui dati 2004, presentate nel seguito, sono tratte dal Rapporto sullo stato di qualità dell'aria della Provincia di Cagliari – anno 2004-2005, elaborato dall'Assessorato alla Tutela dell'Ambiente, Settore Ecologia..

Serie storiche di dati utilizzati

Per le simulazioni effettuate con il modello di calcolo, adottato per valutare le ricadute al suolo dalle sorgenti emissive della Fluorsid, sono stati utilizzati i **dati meteorologici orari relativi all'anno 2006**⁽²⁾. L'anno 2006 è stato scelto, in quanto costituisce l'anno di riferimento per la presentazione dei dati storici di emissioni e consumi dello stabilimento (si veda la Scheda B allegata alla domanda di AIA).

La rappresentatività dell'anno 2006 è risultata confermata dall'esame dei dati meteorologici raccolti per l'intero periodo 2001-2006 (vedi successivo capitolo 2).

Parametri utilizzati

Il modello di simulazione delle ricadute al suolo degli inquinanti atmosferici richiede i seguenti parametri meteorologici in ingresso su base oraria:

- velocità e direzione del vento
- temperatura dell'aria
- classi di stabilità atmosferica e altezza dello strato di rimescolamento

I parametri rilevati su base oraria dalla centralina CENAS6 sono i seguenti:

- velocità e direzione del vento
- umidità relativa
- radiazione solare
- piovosità
- temperatura dell'aria
- pressione.

Dai dati raccolti dalla stazione meteo sono stati pertanto acquisite direttamente le seguenti tipologie di dati:

- velocità e direzione del vento
- temperatura dell'aria

I dati di radiazione solare rilevati dalla centralina sono stati, invece, utilizzati per determinare le classi di stabilità atmosferica, in accordo con i criteri descritti in **Appendice 1**.

² La Provincia di Cagliari ha fornito i dati su base oraria per il periodo 2001-2005.

2. ANEMOLOGIA

I dati di velocità e direzione del vento sono sintetizzati nelle "rose dei venti" annuali e stagionali.

Nelle pagine seguenti sono riportate per l'anno 2006:

- la rosa dei venti
- la tabella e l'istogramma delle frequenze di occorrenza dei venti, espresse come combinazione delle frequenze dei settori di provenienza e delle loro classi di velocità.

Dai dati e dagli elaborati grafici si può osservare come il vento rilevato nella centralina CENAS6 provenga prevalentemente dai settori: Ovest -Nord- Ovest, Nord-Nord Ovest e Sud-Sud-Est, Sud-Est.

In termini quantitativi, per l'anno 2006, si osserva che:

- i settori da ONO a NNO, incluso il settore NO, hanno una frequenza totale pari a circa il 49%
- i settori da SSE a ESE, incluso il settore SE, hanno una frequenza totale pari a circa il 30 %;

Sono stati esaminati i dati relativi all'intero periodo 2001-2006. La rosa dei venti elaborata per l'anno medio sull'intero periodo 2001-2006, di seguito riportata, conferma la rappresentatività dell'anno meteorologico 2006 rispetto all'intero periodo considerato.

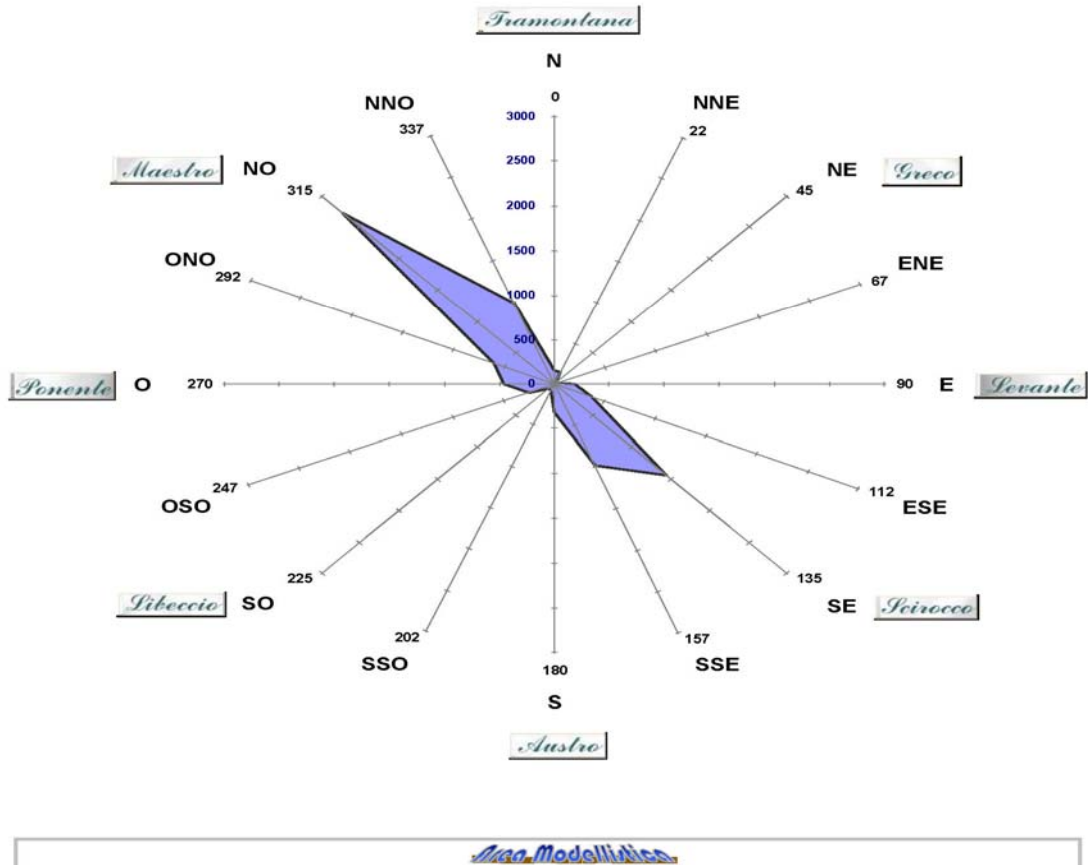
Per l'anno medio 2001-2006, risulta che:

- i settori da O a ENE, incluso il settore ONO, il settore NO, il settore NNO hanno una frequenza totale pari a circa il 54 %;
- i settori da SEE a E, incluso il settore SE ed il settore ESE, hanno una frequenza totale pari a circa il 25 %;

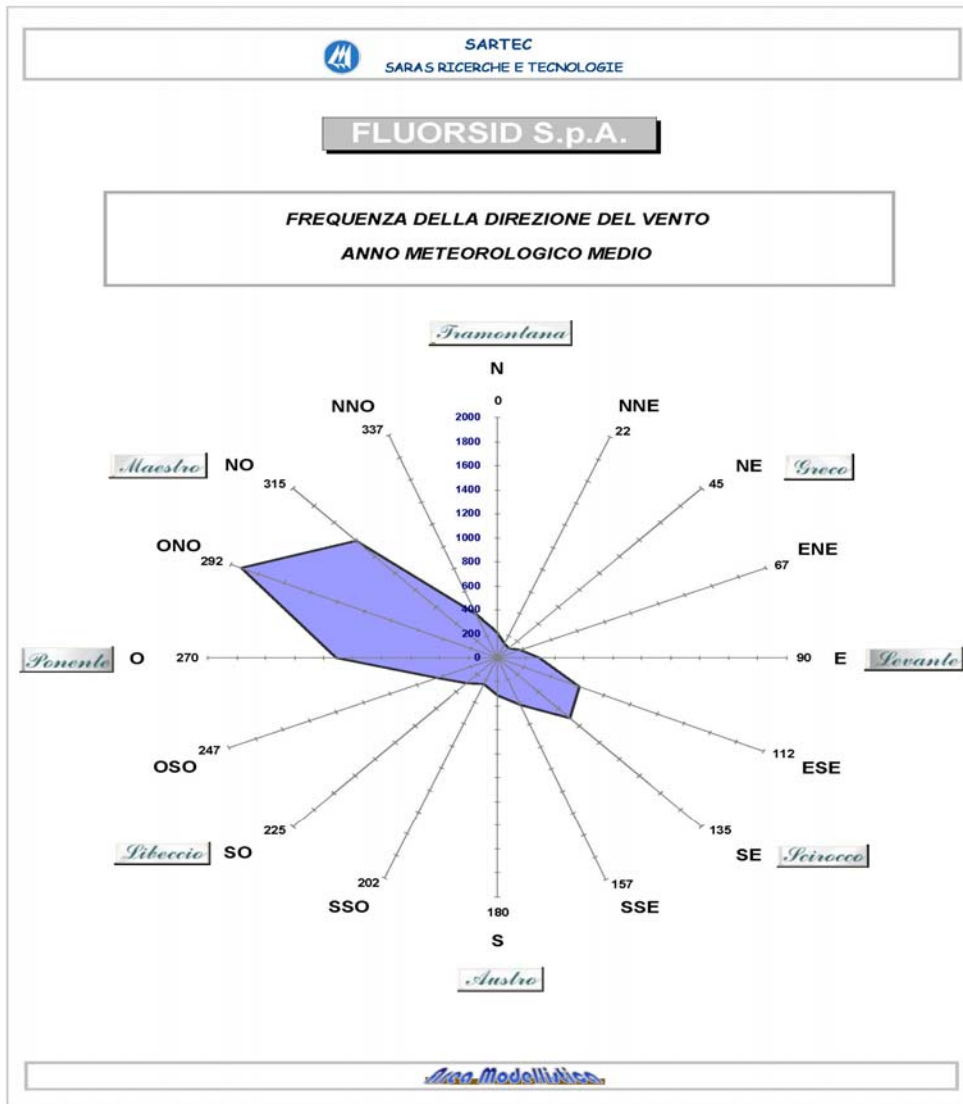


FLUORSID S.p.A.

**FREQUENZA DELLA DIREZIONE DEL VENTO
ANNO 2006**



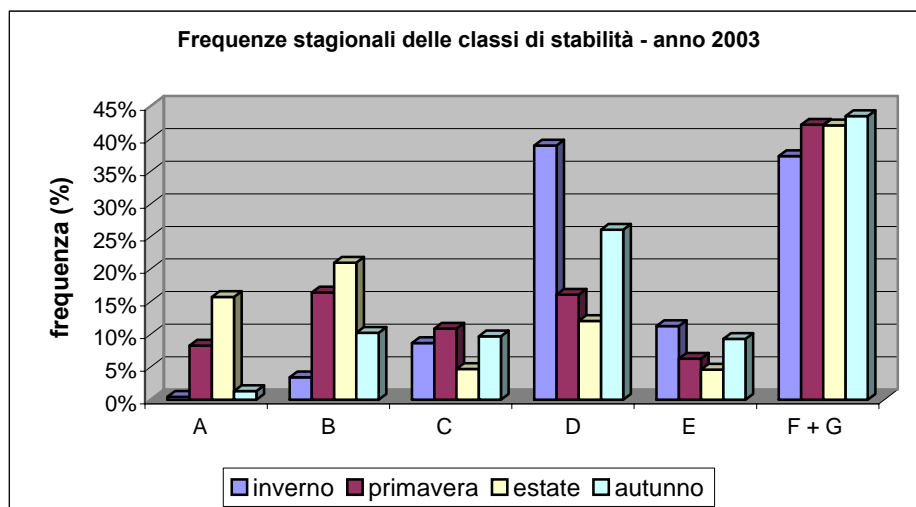
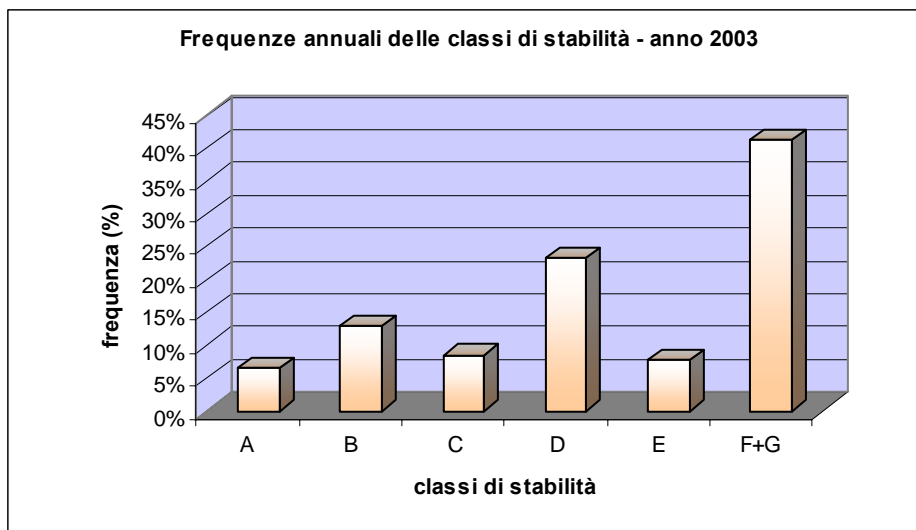
Zona di Macchiareddu-Rosa dei Venti ANNO 2006: Centralina CENAS6



Zona di Macchiareddu-Rosa dei Venti ANNO METEOROLOGICO MEDIO: Centralina CENAS6

3. STABILITA' ATMOSFERICA

I grafici seguenti mostrano la distribuzione delle classi di stabilità calcolate per il 2006, globalmente nell'arco dell'anno e per le diverse stagioni.



Come si può notare, la classe di stabilità maggiormente rappresentata è la classe più stabile (F+G), seguita dalla classe neutra (D).

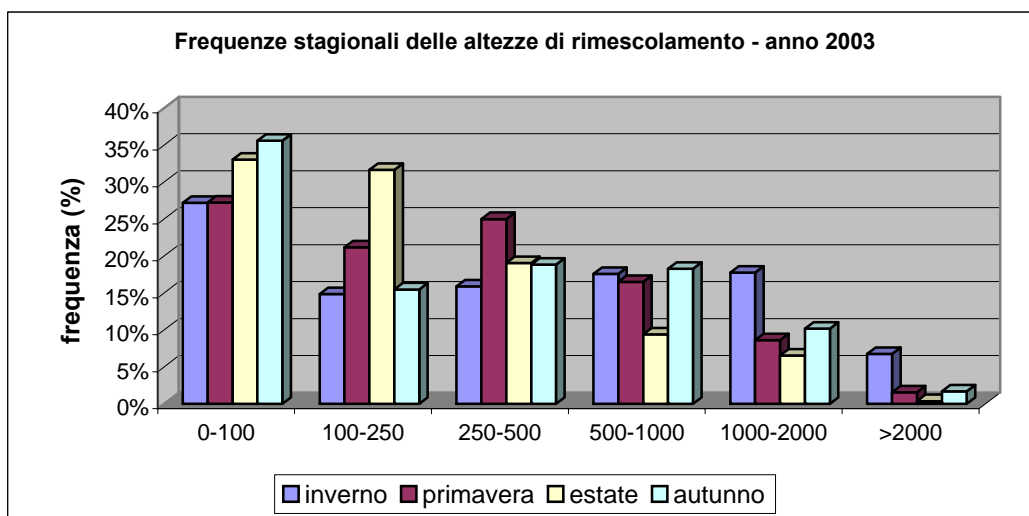
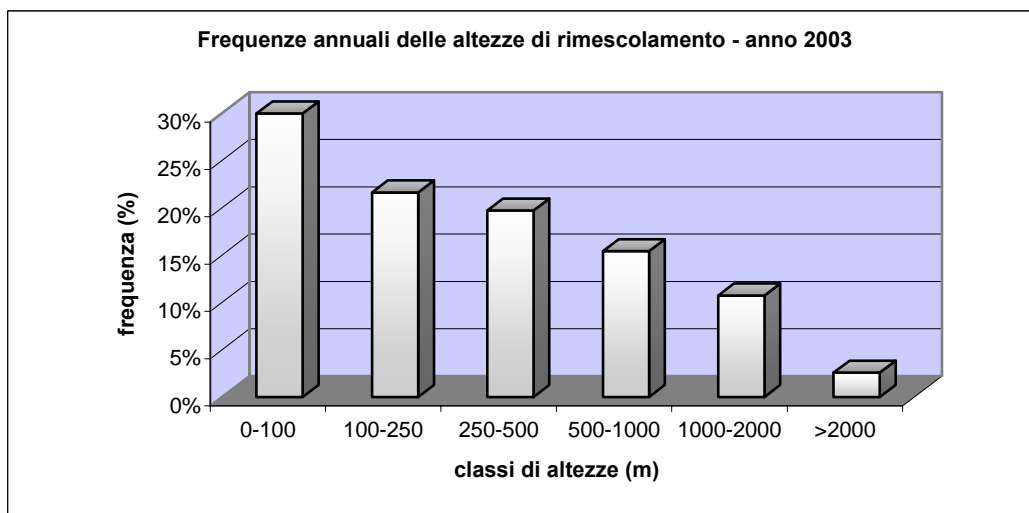
La classe F+G risulta presente in maniera significativa in tutte le stagioni dell'anno, con particolare rilevanza nel periodo autunnale.

La classe D risulta maggiormente presente nel periodo invernale, mentre le classi instabili sono più frequenti in primavera ed in estate.

Sia le classi di stabilità sia l'altezza dello strato di rimescolamento sono state calcolate in base ai criteri descritti in Appendice 1.

Nei grafici seguenti si riportano le frequenze di occorrenza delle altezze di rimescolamento, suddivise per classi.

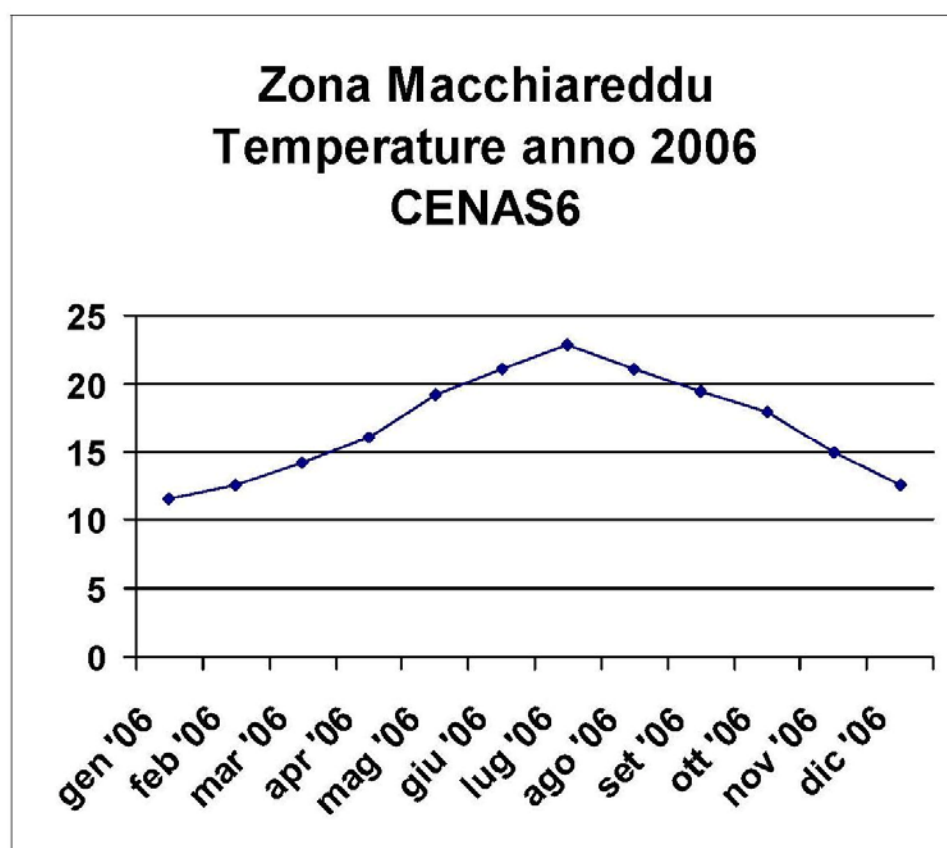
Si nota l'elevata prevalenza delle classi di valori più bassi, sia nella media annua sia nelle singole stagioni.



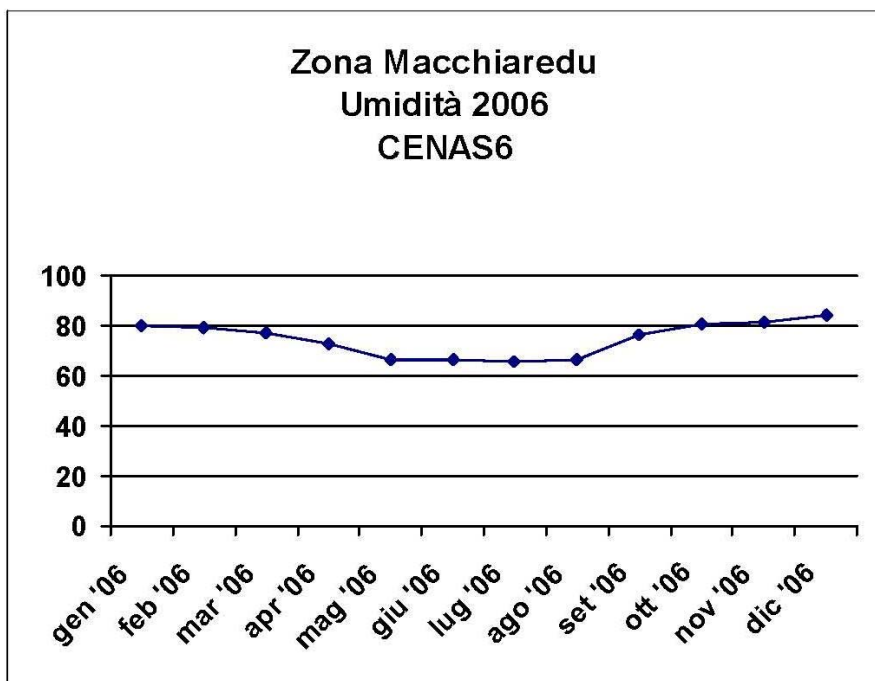
4. TEMPERATURA, UMIDITA', PIOVOSITA'

Nel grafico seguente è illustrato l'andamento delle temperature medie mensili per l'anno 2006. La temperatura media annua è risultata pari a circa 20°C. A titolo di completamento della descrizione dei dati meteorologici 2006, si riportano i grafici sintetici sull'andamento dell'umidità relativa e della piovosità.

L'Umidità relativa ha assunto valori elevati nel periodo autunnale e valori molto bassi nel periodo estivo, con un valor medio annuo pari a circa 75%.

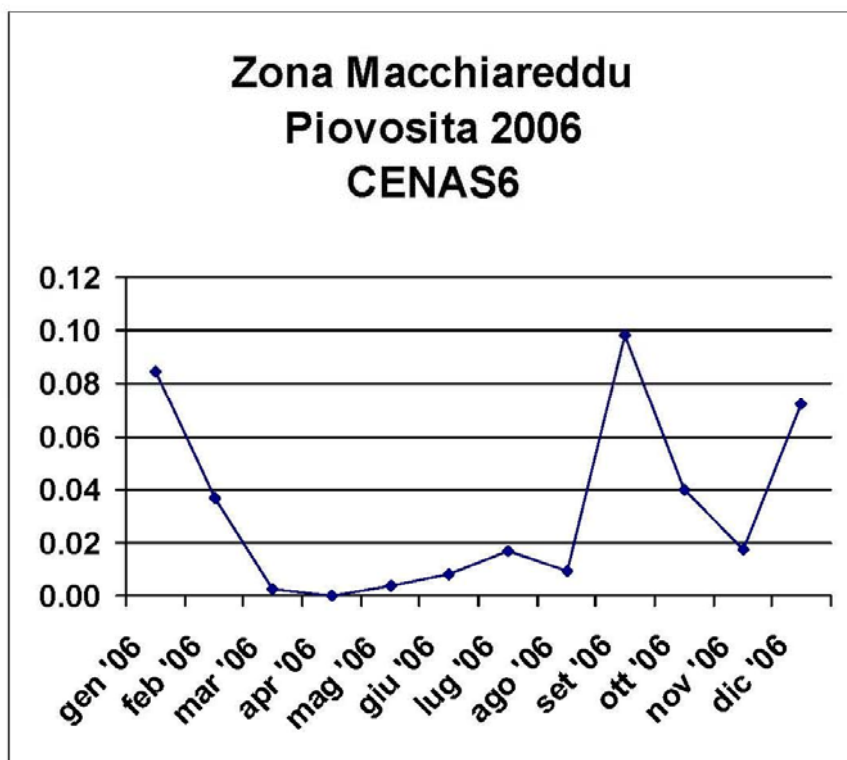


Temperature medie mensili- Zona Macchiareddu - Centralina Meteorologica CENA6



Umidità media mensile Zona Macchiareddu - Centralina Meteorologica CENA6

Le precipitazioni complessive del 2006 non arrivano ai 400 mm totali, con valori minimi o nulli nel periodo aprile - giugno.



Piovosità media mensile Zona Macchiareddu - Centraline Meteorologica CENA 6

APPENDICE 1

Criteri adottati per la determinazione delle Classi di stabilità atmosferica e per le altezze di rimescolamento

Le classi di stabilità atmosferica sono state ricavate con il criterio di Pasquill, a partire dalla radiazione solare incidente (per le ore diurne) e netta (per le ore notturne) e dalla velocità del vento, in accordo con la tabella sotto riportata.

Radiazione (W/m^2) RT globale, RN netta	Velocità del vento, VVP(m/s)					
	$V < 2$	$2 \leq V < 3$	$3 \leq V < 4$	$4 \leq V < 5$	$5 \leq V < 6$	$V \geq 6$
Giorno						
RT ≥ 700	A	A	B	B	C	C
$540 \leq RT \leq 700$	A	B	B	B	C	C
$400 \leq RT \leq 540$	B	B	B	C	C	D
$270 \leq RT \leq 400$	B	B	C	C	C	D
$140 \leq RT \leq 270$	C	C	C	D	D	D
RT ≤ 140	D	D	D	D	D	D
Notte						
RN ≥ 700	D	D	D	D	D	D
$540 \leq RN \leq 700$	F	E	D	D	D	D
RN ≤ 140	F	F	E	E	D	D

Tabella classi di stabilità Pasquill

Radiazione Netta

Per il calcolo della Radiazione Netta, flusso di energia che rappresenta il bilancio di tutte le componenti radiative all'interfaccia aria suolo, il modello si avvale dell'espressione semiempirica di Holtslag e Van Ulden:

$$R_{n(i,j)} = \frac{(1 - \alpha_{i,j}) * R_{g(i,j)} + c_1 * T_{i,j}^6 + c_2 * N_j - \sigma T_{i,j}^4}{(1 + c_H)}$$

che fornisce la Radiazione Netta dell'ora i-esima e del giorno j-esimo.

In essa si ha:

σ = costante di Stephan-Boltzman ($5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$)

$\alpha_{i,j}$ = albedo dell'ora i-esima e del giorno j-esimo

$R_{g(i,j)}$ = Radiazione Solare Globale (radiazione solare che giunge al suolo)

N_j = copertura nuvolosa espressa come frazione dell'unità (0-1)

$c_1 * T^6$ = termine correttivo dipendente dalla temperatura dove c_1 è pari a $5.31 \cdot 10^{-13} \text{ W/m}^2\text{K}^6$

$c_2 * N_j$ = termine correttivo dipendente dalla copertura nuvolosa in cui c_2 è pari a 60 W/m^2

c_H = termine correttivo calcolabile dalla seguente espressione:

$$c_H = 0.38 * \left[\frac{(1 - \alpha_h) + \frac{\gamma}{s}}{1 + \frac{\gamma}{s}} \right]$$

dove $\frac{\gamma}{s} = \exp(-0.55 * (T_{i,j} - 279))$ mentre α_H è un parametro dipendente dal tipo di suolo.

Quest'ultimo assume valori che variano al variare del tipo di suolo, come viene mostrato nella tabella seguente:

Tipo di Suolo	α
deserto secco senza pioggia per mesi	0.0 ÷ 0.2
zone rurali aride	0.2 ÷ 0.4
campi coltivati o meno, in periodi secchi	0.4 ÷ 0.6
ambiente urbano	0.5 ÷ 1.0
campi coltivati nei periodi umidi e foreste	0.8 ÷ 1.2
laghi ed oceani	1.2 ÷ 1.4

Valori del parametro α_H

La variazione dell'albedo durante l'arco della giornata viene espresso dalla relazione:

$$\alpha_{i,j} = \alpha' + (1 - \alpha') * \exp[-0.1 * \bar{\Psi}_{i,j} - 0.5 * (1 - \alpha')^2]$$

dove α' è un coefficiente espresso in funzione del tipo di suolo e Ψ è l'angolo di elevazione solare sopra l'orizzonte, la cui espressione relativa all'ora i-esima e al giorno j-esimo è la seguente:

$$\Psi_{i,j} = \arcsin(\sin(\Phi) * \sin(\delta_j) - \cos(\Phi) * \cos(\delta_j) * \cos(\frac{2 * \pi * t_i}{t_d} - \lambda_e))$$

in cui:

ϕ = latitudine

λ = longitudine

t_i = orario riferito a Greenwich

e infine

δ_j è l'angolo di declinazione Solare, la cui espressione è:

$$\delta_j = \Phi_r * \cos\left(2 * \pi * \frac{(d_j - d_r)}{d_y}\right)$$

in cui:

Φ_r = angolo di inclinazione dell'asse di rotazione terrestre = 23.45° (emisfero nord)

d_j = numero giorno corrente (giorno giuliano)

d_y = numero ultimo giorno dell'anno = 365 (anni non bisestili)

d_r = numero giorno del Solstizio d'Estate = 173 (anni non bisestili)

Poiché i calcoli di concentrazione determinati sono mediati nell'arco temporale minimo di un'ora il valore stesso di Ψ viene mediato come segue:

$$\overline{\Psi}_{i,j} = \frac{\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{2}$$

La copertura nuvolosa N è stimata tramite la relazione empirica di Bristow e Campbell (1984):

$$N_j = \exp[-0.003 * (T_{j,\max} - T_{j,\min})^{2.4}]$$

che è espressa in funzione della massima e minima temperatura giornaliera.

Una delle correlazioni più usate, ed utilizzata in tale lavoro, per il calcolo della radiazione solare è quella ottenuta da De Bruin e Holtslag (1982) e Holtslag e Van Ulden (1983) rianalizzando il lavoro di Kasten e Czeplak (1980):

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{g(i,j)} = 0 \text{ di notte} \\ R_{g(i,j)} = (a_1 * \sin \bar{\Psi}_{i,j} + a_2) * (1 + b_1 * N_j^{b_2}) \text{ di giorno} \end{array} \right.$$

i parametri **b_1** e **b_2** valgono rispettivamente **-0.75** e **3.4** mentre per i parametri **a_1** e **a_2** si sono stimati i seguenti valori:

$$\mathbf{a_1} = 873.41 \pm 0.56 \text{ W/m}^2$$

$$\mathbf{a_2} = -6.48 \pm 0.28 \text{ W/m}^2$$

La procedura per la stima dei parametri **a_1** e **a_2** è stata trattata in Appendice 2.

L'altezza dello strato di rimescolamento è stata calcolata come descritto di seguito.

Altezza di rimescolamento

La maggior parte dei fenomeni di inquinamento dell'aria si manifestano nella parte più bassa dell'atmosfera, detta "strato di confinamento planetario" o PBL (Planetary Boundary Layer). Questo strato è definito come "la regione entro la quale l'atmosfera risente degli effetti di superficie attraverso scambi di quantità di moto, calore ed umidità". Particolarmente significativa risulta l'individuazione dell'altezza di rimescolamento h . Questa è definita come lo spessore dello strato rimescolato, ossia quello strato dell'atmosfera dove avviene il rimescolamento delle masse d'aria.

La determinazione di h è di fondamentale importanza per la caratterizzazione climatologica di un'area specifica, quando si vogliono studiare i problemi legati all'inquinamento atmosferico.

L'altezza di rimescolamento varia in funzione delle condizioni di stabilità atmosferica.

In condizioni neutre od instabili h coincide con l'altezza del PBL z_i , vale a dire con la quota della base dell'inversione termica verticale.

Al contrario, in condizioni stabili h assume valori decisamente inferiori a quelli di z_i , la quale in tal caso è data dalla sommità dell'inversione termica verticale.

Nel calcolo dell'altezza di rimescolamento è necessario stimare alcuni parametri che caratterizzano il PBL:

- la velocità di attrito o friction velocity, u^* ;
- la lunghezza di Monin-Obukhov, L ;
- il flusso di calore superficiale, H_0 .

Altezza di rimescolamento nel CBL

A seguito dell'irraggiamento solare durante le ore diurne le masse d'aria a contatto con la superficie terrestre si riscaldano e salendo verso l'alto, generano moti convettivi, formando così il CBL (Convective Boundary Layer)

Il flusso di calore sensibile scambiato tra la terra e l'atmosfera viene stimato con il metodo di Priestley-Taylor modificato da De Bruin e Holtslag (1982) secondo cui:

$$H_{0(i,j)} = \frac{(1 - \alpha_h) + \gamma / s}{1 + \gamma / s} * \omega * R_{n(i,j)} - \beta \alpha_h$$

dove compaiono due parametri semiempirici α e β che dipendono dal tipo di suolo e soprattutto dal suo contenuto di umidità ed il parametro ω che può assumere valori nell'intervallo (0.8÷0.9).

Tuttavia l'esteso uso pratico che si è fatto in questi ultimi decenni di questo modello ha portato ad individuare alcuni valori caratteristici. Per il parametro β , c'è ormai un accordo unanime nell'attribuirgli il valore di 20 (W/m²), indipendentemente dal tipo di superficie considerata e della sua umidità.

La *friction velocity* viene calcolata mediante l'espressione di Panofsky e Dutton:

$$u_{* (i,j)} = \frac{k * u_{i,j}}{\ln\left(\frac{z_r}{z_0}\right) - \Psi_m\left(\frac{z_r}{L}\right) + \Psi_m\left(\frac{z_0}{L}\right)}$$

dove:

k è la costante di Von Barman, (0.33÷0.43)

u_{ij} è la velocità del vento all'altezza di riferimento

z_r è l'altezza di riferimento a cui è misurato il vento (in genere 10 m)

z_0 è la rugosità del terreno

I valori di z_0 che sono stati presi in considerazione sono riportati nella tabella che segue:

	Land-Use Type	Spring	Summer	Autumn	Winter
1	Water Surface	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
2	Deciduous Forest	1	1.3	0.8	0.5
3	Coniferous Forest	1.3	1.3	1.3	1.3
4	Swamp	0.2	0.2	0.2	0.05
5	Cultivated Land	0.03	0.2	0.05	0.01
6	Grassland	0.05	0.1	0.01	0.001
7	Urban	1	1	1	1
8	Desert Shrubland	0.3	0.3	0.3	0.15

Surface Roughness Length, in Meters, for Land-Use Types and Season (from Sheih et al., 1979)

L è la lunghezza di Monin-Obukhov

$\Psi_m \left(\frac{z_{ref}}{L} \right)$ e $\Psi_m \left(\frac{z_0}{L} \right)$ sono due funzioni che vengono espresse come segue:

$$\Psi_m \left(\frac{z_r}{L} \right) = 2 * \ln \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) + \ln \left(\frac{1 + \mu^2}{2} \right) - 2 * \arctan(\mu) + \frac{\pi}{2}$$

$$\Psi_m \left(\frac{z_0}{L} \right) = 2 * \ln \left(\frac{1 + \mu_0}{2} \right) + \ln \left(\frac{1 + \mu_0^2}{2} \right) - 2 * \arctan(\mu_0) + \frac{\pi}{2}$$

in cui:

$$\mu = \left(1 - 16 * \frac{z_r}{L} \right)^{1/4}$$

$$\mu_0 = \left(1 - 16 * \frac{z_0}{L} \right)^{1/4}$$

La lunghezza di Monin-Obukhov viene calcolata tramite la relazione:

$$L = \left(- \frac{\rho * c_p * T_{i,j} * (u_*')^3}{g * k * H_{i,j}} \right)$$

dove:

g è l'accelerazione di gravità

c_p è il calore specifico dell'aria a pressione costante riferito all'unità di massa

ρ è la densità dell'aria

H è il flusso di calore sensibile calcolato precedentemente.

Si può notare che u_* ed L sono tra loro interdipendenti e quindi risulta impossibile un calcolo immediato di entrambi.

Pertanto, per il calcolo della *friction velocity* e dell'altezza di Monin-Obukhov si è adottato un metodo ricorsivo che utilizza come valore di primo tentativo :

$$u_*' = \frac{k * u_{i,j}}{\ln\left(\frac{z_r}{z_0}\right)}$$

Il ciclo ha termine quando due valori consecutivi di u_* o di L differiscono tra loro di meno dell'1%.

Nel CBL l'altezza di rimescolamento viene uguagliata al massimo tra i contributi di origine convettiva e meccanica:

$$h_{i,j} = \max \{ z_{m(i,j)}, z_{c(i,j)} \}$$

Il calcolo dell'altezza dello strato di mescolamento dovuta a moti convettivi all'interno del CBL, *convective mixing height*, viene realizzato mediante l'espressione semiempirica di Weil e Brower:

$$z_{ic} * \Theta(z_{ic}) - \int_0^{z_{ic}} \Theta(z) dz = (1 + 2 * A) * \int_0^t \frac{H(t')}{\rho * C_p} dt'$$

dove:

θ è la temperatura potenziale al disopra di z_{ic} ;

A è un coefficiente correttivo introdotto da Deardorff, $A = 0.2$;

z_{ic} è la mixing height convettiva;

t è una certa ora diurna conteggiata a partire dall'alba;

A seguito di studi condotti da Venkatram si è giunti ad una formulazione empirica per l'altezza di rimescolamento dovuta al contributo meccanico:

$$z_{m(ta_j, j)} = 2400 * u_{*(ta_j, j)}^{3/2}$$

Il valore di z_m , così calcolato, porterebbe all'ottenimento di bruschi e poco realistici innalzamenti o abbassamenti del valore di z_m durante le ore di transizione tra la notte e il giorno o durante periodi in cui si hanno rilevanti variazioni di velocità del vento.

Per ovviare a tale inconveniente è stato utilizzato il metodo proposto in AERMET, dove l'altezza di rimescolamento viene ricalcolata come segue :

$$z(t + \Delta t) = z(t)e^{-\Delta t/\tau} + z(t + \Delta t)[1 - e^{-\Delta t/\tau}]$$

Dove:

$$\bar{\tau} = \frac{z_{im}(t)}{\beta_{\tau} * u_*(t + \Delta t)}$$

e

$$\beta_{\tau} = 2$$

Altezza di rimescolamento nel SBL

Nel SBL (*Stable Boundary Layer*) la *friction velocity* può essere stimata dalla relazione seguente:

$$u_{*(i,j)} = \frac{C_D * u_{i,j}}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2 * u_0}{\sqrt{C_D} * u_{i,j}} \right)^2} \right)$$

dove:

$$C_D = \frac{k}{\ln\left(\frac{z_r}{z_0}\right)}$$

$$u_0 = \sqrt{\frac{\beta_m * z_r}{k * A}}$$

tale relazione è applicabile solo se la velocità del vento è superiore a un valore critico u_{cr} :

$$u_{cr} = \sqrt{\frac{4 * \beta_m * z_r * g * \Theta_{*(i,j)}}{T_{i,j} * C_D}}$$

in cui $\Theta_{*(i,j)}$ è la *temperature scale* definita come :

$$\Theta_{*(i,j)} = 0.09 * (1 - 0.5 * N_j^2)$$

Per velocità inferiori, $u < u_{cr}$ il modello presuppone la validità delle seguenti relazioni di proporzionalità:

$$\Theta_{*(i,j)} = \Theta_{*(cr)} \frac{u_{i,j}}{u_{cr}}$$

$$u_{*(i,j)} = u_{*(cr)} \frac{u_{i,j}}{u_{cr}}$$

Recependo i risultati degli studi condotti da *Hanna* e *Weil*, si fissa il valore massimo del prodotto

$$[\Theta_* * u_*]_{max} = 0.05 \text{ mKs}^{-1}$$

Nel caso in cui si ottengano valori per la *friction velocity* e per la *temperature scale* tali che $\Theta_* * u_* > 0.05 \text{ mKs}^{-1}$, Θ_* è ricalcolato come $\Theta_* = 0.05 / u_*$ ed utilizzato per un nuovo calcolo di u_* .

Ricavata la *friction velocity*, la *temperature scale* viene ricalcolata con la nuova u_* come $\Theta_* = 0.05 / u_*$.

Una volta stimata la velocità di attrito e l'altezza di Monin-Obukhov

$$L = \left(\frac{T_{(i,j)} * u_{*(i,j)}^2}{g * k * \Theta_{*(i,j)}} \right)$$

si passa al calcolo dell'altezza di rimescolamento pari al contributo di tipo meccanico:

$$h_{i,j} = 2400 * u_{*(i,j)}^{3/2}.$$

APPENDICE 2

Stima dei parametri meteorologici sito specifici

Stima dei parametri a_1 e a_2 della espressione della Radiazione Globale $R_{g(i,j)}$ di De Bruin e Holtslag (1982) e Holtslag e Van Ulden (1983)

Per stimare i parametri a_1 e a_2 della espressione:

$$R_{g(i,j)} = (a_1 * \sin \bar{\Psi}_{i,j} + a_2) * (1 + b_1 * N_j^{b_2})$$

che fornisce la Radiazione Globale dell'ora i -esima e del giorno j -esimo, in funzione dell'angolo medio di elevazione solare $\bar{\Psi}_{i,j}$, e della nuvolosità N_j , è stato applicato il metodo dei minimi quadrati.

I parametri a_1 e a_2 dipendono dalle caratteristiche sito-specifiche dell'area in esame (latitudine, longitudine stato di inquinamento dell'aria, ...) mentre i parametri b_1 e b_2 sono indipendenti dalle caratteristiche sito-specifiche dell'area in esame.

La funzione che esprime $R_{g(i,j)}$ è una funzione lineare nei parametri a_1 e a_2 , ossia non ci sono termini in cui i due parametri siano tra loro moltiplicati o divisi. Questo comporta che il metodo dei minimi quadrati, applicato per la determinazione di a_1 e a_2 , ha una soluzione analitica.

Si ricorda che il metodo dei minimi quadrati prevede che il valore dei parametri a_1 e a_2 che permettono di realizzare il "fit" migliore tra i valori sperimentali misurati della Radiazione Globale ($R_{g(i,j)}^{sperimentale}$) e i valori teorici ($R_{g(i,j)}^{teorico}$) forniti dalla relazione di $R_{g(i,j)}$ suesposta sono i valori che rendono minima la somma:

$$S = \sum_{i=1}^n \left[\frac{R_{g(i,j)}^{sperimentale} - R_{g(i,j)}^{teorico}}{\delta_{i,j}} \right]^2 = \sum_{i=1}^n \left[\frac{R_{g(i,j)}^{sperimentale} - f(x_{i,j}; a_1, a_2)}{\delta_{i,j}} \right]^2$$

in cui compare il termine $\delta_{i,j}$ che rappresenta l'errore sperimentale sulla Radiazione Globale misurata $R_{g(i,j)}^{sperimentale}$ dell'ora i -esima del giorno j -esimo e la variabile indipendente $x_{i,j} = \sin \bar{\Psi}_{i,j}$.

Si noti che la somma è estesa alle ore i del giorno j -esimo.

Per trovare i valori di a_1 e a_2 che rendono minima la espressione di S l'analisi matematica prevede che si debba risolvere il sistema di equazioni:

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0$$

con l'indice k che assume i valori interi compresi tra 1 ed il numero di parametri da determinare, nel nostro caso $k=1, 2$.

La struttura della funzione $f(x_{i,j}; a_k)$ comporta che il sistema possa essere o meno risolto analiticamente. Nel caso in esame è stato già osservato che la $f(x_{i,j}; a_k)$ è lineare nei suoi parametri a_1 e a_2 pertanto procediamo alla risoluzione analitica del sistema.

Per semplicità di calcolo riscriviamo la funzione $f(x_{i,j}; a_1, a_2)$ nel modo seguente:

$$R_{g(i,j)} = f(x_{i,j}; a_1, a_2) = (a_1 * \sin \bar{\Psi}_{i,j} + a_2) * (1 + b_1 * N_j^{b_2}) = (a_1 * x_{i,j} + a_2) * K$$

$$\text{con } K = (1 + b_1 * N_j^{b_2}).$$

Considerando le derivate parziali prime della funzione S rispetto ai parametri a_1 e a_2 si hanno le equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \\ \\ \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} a_1 * D + a_2 * A = E \\ \\ a_1 * A + a_2 * B = C \end{array} \right.$$

in cui, per semplificare le notazioni, sono stati definiti i termini:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = K^2 * \sum_{i=1}^n \frac{\sin \bar{\Psi}_{i,j}}{\delta_{i,j}^2} \\ B = K^2 * \sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta_{i,j}^2} \\ C = K * \sum_{i=1}^n \frac{R_{g(i,j)}}{\delta_{i,j}^2} \\ D = K^2 * \sum_{i=1}^n \frac{\sin^2 \bar{\Psi}_{i,j}}{\delta_{i,j}^2} \\ E = K * \sum_{i=1}^n \frac{\sin \bar{\Psi}_{i,j} * R_{g(i,j)}}{\delta_{i,j}^2} \end{array} \right.$$

La soluzione del sistema risulta essere:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{E * B - C * A}{DB - A^2} \\ a_2 = \frac{D * C - A * E}{DB - A^2} \end{array} \right.$$

Per calcolare gli errori sui parametri a_k ($k=1, 2$) occorre applicare la propagazione dell'errore alle funzioni di a_1 e a_2 :

$$\delta_{a_k}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a_k}{\partial R_{g(i,j)}} * \delta_{i,j} \right)^2$$

Applicando la propagazione dell'errore si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{a_1} = \sqrt{\frac{B}{(DB - A^2)}} \\ \delta_{a_2} = \sqrt{\frac{D}{(DB - A^2)}} \end{array} \right.$$

Gli stessi risultati si sarebbero ottenuti se si fosse costruito la matrice covarianza o degli errori

$$V_{i,j}$$

Ricordiamo che la matrice inversa della matrice degli errori è:

$$(V^{-1})_{l,m} = \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 S}{\partial a_l \partial a_m}$$

dove le derivate seconde sono valutate in condizione di minimo.

Si può mostrare che gli elementi della diagonale principale della matrice sono le varianze empiriche dei parametri a_1 e a_2 mentre gli elementi fuori diagonale sono le covarianze tra i parametri a_1 e a_2 .



$$V = \begin{pmatrix} \delta_{a_1}^2 & \text{cov}(a_1, a_2) \\ \text{cov}(a_2, a_1) & \delta_{a_2}^2 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{a_1} = \sqrt{\frac{B}{(DB - A^2)}} \\ \delta_{a_2} = \sqrt{\frac{D}{(DB - A^2)}} \\ \text{cov}(a_1, a_2) = \text{cov}(a_2, a_1) = \frac{-A}{(DB - A^2)} \end{array} \right.$$

Per completare il processo è necessario testare la "qualità del fit".

Si è applicato il noto criterio del χ^2 .

Si sono presi in considerazione i valori misurati di $R_{g(i,j)}^{sperimentale}$ di diversi giorni dell'anno meteorologico medio che abbiamo ottenuto mediando i 6 anni compresi tra il 2001 ed il 2006.

I valori ottenuti per i parametri sono stati:

$$a_1 = 873.41 \pm 0.56 \text{ W/m}^2$$

$$a_2 = -6.48 \pm 0.28 \text{ W/m}^2$$

Poiché il numero dei gradi di libertà per ogni campione giornaliero di dati sperimentali (24 valori) è pari a 22 ed il valore del χ^2 è pari a 12 otteniamo che:

$$P(\chi^2 > 12) = 95\%$$

concludiamo che il "fit" è ampiamente accettabile.